

## 23. CAMBIOS DE BASE

Dada una aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y la base  $B_c^n = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  se ha definido matriz en bases canónicas de la aplicación lineal  $f$  a la matriz  $A = M(f, B_c^n, B_c^m)$  cuyas columnas son las coordenadas de  $f(\mathbf{e}_i)$  en la base  $B_c^m$ .

Esta definición se puede ampliar a cualquier par de bases de los espacio inicial y final.

### 23.1. MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL EN BASES ARBITRARIAS

Dada una aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , sea  $B^i = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$  y  $B^f = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$  una base de  $\mathbb{R}^m$ . Se llama **matriz en las bases  $B^i$  y  $B^f$  de la aplicación lineal  $f$**  a la matriz  $A = M(f, B^i, B^f) \in \mathcal{M}_{m \times n}$  cuyas columnas son las coordenadas de  $f(\mathbf{u}_i)$  en la base  $B^f$ .

#### EJEMPLO 9

Calcular la matriz de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio  $S$  en las bases

$$B^i = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B^f = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

siendo  $S$  un subespacio vectorial que tiene por base  $B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

#### Solución

Como se vio en el ejemplo 4, una base ortogonal de  $S$  es:  $B_S^{og} = \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Se calcula la proyección ortogonal de los elementos de la base  $B^i$ , y se escribe el resultado respecto de la base  $B^f$ :

$$p_S(\mathbf{u}_1) = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{0}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{u}}_{1B^f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_S(\mathbf{u}_2) = \widehat{\mathbf{u}}_2 = \frac{0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{u}}_{2B^f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_S(\mathbf{u}_3) = \widehat{\mathbf{u}}_3 = \frac{0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{0}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{u}}_{3B^f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz pedida

$$A' = M(p_S, B^i, B^f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 23.2. MATRICES EQUIVALENTES

Dos matrices que representan a la misma aplicación lineal en distintas bases se dice que son **matrices equivalentes**.

#### EJEMPLO 10

Demostrar que las matrices  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  son equivalentes.

#### Solución

Según se ha visto en los ejemplos 4 y 9, tanto la matriz  $A = M(p_S, B_c^3, B_c^3)$  como la matriz  $A' = M(p_S, B^i, B^f)$  representan respecto de distintas bases la matriz de la proyección ortogonal sobre el subespacio  $S = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , de donde se deduce que  $A$  y  $A'$  son matrices equivalentes.

#### 23.2.1. MATRICES DE LA APLICACIÓN IDENTIDAD

Se considera la aplicación lineal  $i_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que a cada vector  $x \in \mathbb{R}^n$  le hace corresponder el mismo vector en el espacio final:  $i_n(x) = x$ . Esta aplicación lineal, que recibe el nombre de **aplicación identidad**, tiene por matriz respecto de la base canónica a la matriz identidad:

$$I_n = M(i_n, B_c^n, B_c^n)$$

Toda matriz que represente a la aplicación identidad  $i_n$  en otras bases es una matriz equivalente a  $I_n$ .

#### EJEMPLO 11

Calcular  $P = M(i_3, B^i, B_c^3)$ , siendo  $i_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación identidad y  $B^i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

#### Solución

La matriz pedida  $P = M(i_3, B^i, B_c^3)$  tiene en sus columnas las imágenes, por la aplicación identidad, de los elementos de la base  $B^i$  referidas a la base  $B_c^3$ ,

$$i_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se tiene que  $P = M(i_3, B^i, B_c^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se observa además que  $P = C(B^i, B_c^3)$  es la matriz de cambio de base (definida en la unidad 7), de la base  $B^i$  a la base  $B_c^3$ , puesto que tiene en sus columnas los elementos de  $B^i$  respecto de la base  $B_c^3$ .

### 23.2.2. MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

Si  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  y  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  son dos bases de  $\mathbb{R}^n$ , entonces la matriz de cambio de base de la base  $B$  a la base  $B'$ , definida en la unidad 7, coincide con la matriz de la aplicación identidad respecto de las bases  $B$  y  $B'$ , es decir:

$$C(B, B') = M(i_n, B, B')$$

Por tanto, las matrices de cambios de base son matrices equivalentes a la matriz identidad  $I_n = M(i_n, B_c^n, B_c^n)$ .

### 23.3. RELACIÓN ENTRE MATRICES EQUIVALENTES

Dada una aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se consideran:

$B_1^i = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  y  $B_2^i = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$  dos bases del espacio inicial  $\mathbb{R}^n$ ,

$B_1^f = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$  y  $B_2^f = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_m\}$  dos bases del espacio final  $\mathbb{R}^m$ , y

$A = M(f, B_1^i, B_1^f)$  y  $A' = M(f, B_2^i, B_2^f)$  dos matrices que representan la aplicación  $f$  en distintas bases, es decir, dos matrices equivalentes.

Entonces, existen dos matrices regulares  $P \in \mathcal{M}_{n \times n}$  y  $Q \in \mathcal{M}_{m \times m}$  tales que  $A' = Q^{-1} A P$

#### **Demostración**

Se considera la matriz de cambio de base en el espacio inicial:  $P = C(B_2^i, B_1^i) = M(i_n, B_2^i, B_1^i)$

y la matriz de cambio de base en el espacio final:  $Q = C(B_2^f, B_1^f) = M(i_m, B_2^f, B_1^f)$ .

Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  sea  $y = f(x)$ , entonces que tiene que:

$$x_{B_1^i} = P x_{B_2^i}$$

$$y_{B_1^f} = Q y_{B_2^f} \Rightarrow y_{B_2^f} = Q^{-1} y_{B_1^f}$$

Por otra parte  $A = M(f, B_1^i, B_1^f)$  y  $A' = M(f, B_2^i, B_2^f)$ , por tanto

$$y_{B_1^f} = A x_{B_1^i}$$

$$y_{B_2^f} = A' x_{B_2^i}$$

haciendo las sustituciones correspondientes, se tiene que:

$$A' x_{B_2^i} = y_{B_2^f} = Q^{-1} y_{B_1^f} = Q^{-1} A x_{B_1^i} = Q^{-1} A P x_{B_2^i}$$

Dado que la igualdad anterior se verifica para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , se deduce que:

$$A' = Q^{-1} A P$$

Igualdad que se resume diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} B_1^i & \xrightarrow{A} & B_1^f \\ P \uparrow & & \uparrow Q \\ B_2^i & \xrightarrow{A'} & B_2^f \end{array}$$

## EJEMPLO 12

Obtener la matriz de la aplicación  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , respecto de las bases  $B^i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  y

$B^f = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , sabiendo que su matriz respecto de las bases canónicas

es:

$$A = M(f, B_c^3, B_c^4) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

## Solución

Sea  $A' = M(f, B^i, B^f)$  la matriz buscada. La relación establecida entre matrices equivalentes

asegura que:

$$A' = Q^{-1} A P$$

Siendo  $P = \mathcal{C}(B^i, B_c^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $Q = \mathcal{C}(B^f, B_c^4) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

Por tanto:  $A' = Q^{-1} A P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 0 \\ -3 & 5 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 0 \\ -3 & 5 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz buscada es:  $A' = M(f, B^i, B^f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

#### 23.4. NOTA SOBRE TENSORES

En física muchas magnitudes, como la temperatura, la densidad o la masa, son representadas por escalares, otras magnitudes como por ejemplo la velocidad, la aceleración o la fuerza dependen de una dirección en el espacio, y por tanto necesitan los vectores para poder ser bien descritas, también hay fenómenos físicos que dependen linealmente de dos direcciones, y pueden ser descritos por medio de aplicaciones lineales.

Existen magnitudes físicas que dependen linealmente de más de dos vectores, estas magnitudes son descritas por un objeto matemático denominado **tensor**, que generaliza el concepto de escalar, vector y aplicación lineal. Aunque en esta unidad no va a darse una definición formal, un tensor se puede interpretar como una matriz multidimensional que cambia de cierta forma al variar de base, y cuyo orden es el número de índices que se requiere para expresarlo. Así, los escalares, vectores y aplicaciones lineales son tensores de orden 0, 1 y 2 respectivamente.

La teoría de la relatividad desarrollada por Einstein se escribió usando el lenguaje de los tensores de orden 4. Un estudio completo sobre tensores puede encontrarse en la bibliografía recomendada.